

Zweite Ersatzarbeit

für die Stunde vom

29.8.2012

Zeitwert: Ca. eine Schulstunde plus Hausaufgabenzeit

Thema:

Überbestimmte Gleichungssysteme

Bitte ausfüllen:

Bearbeitungszeit: _____

Fehler _____

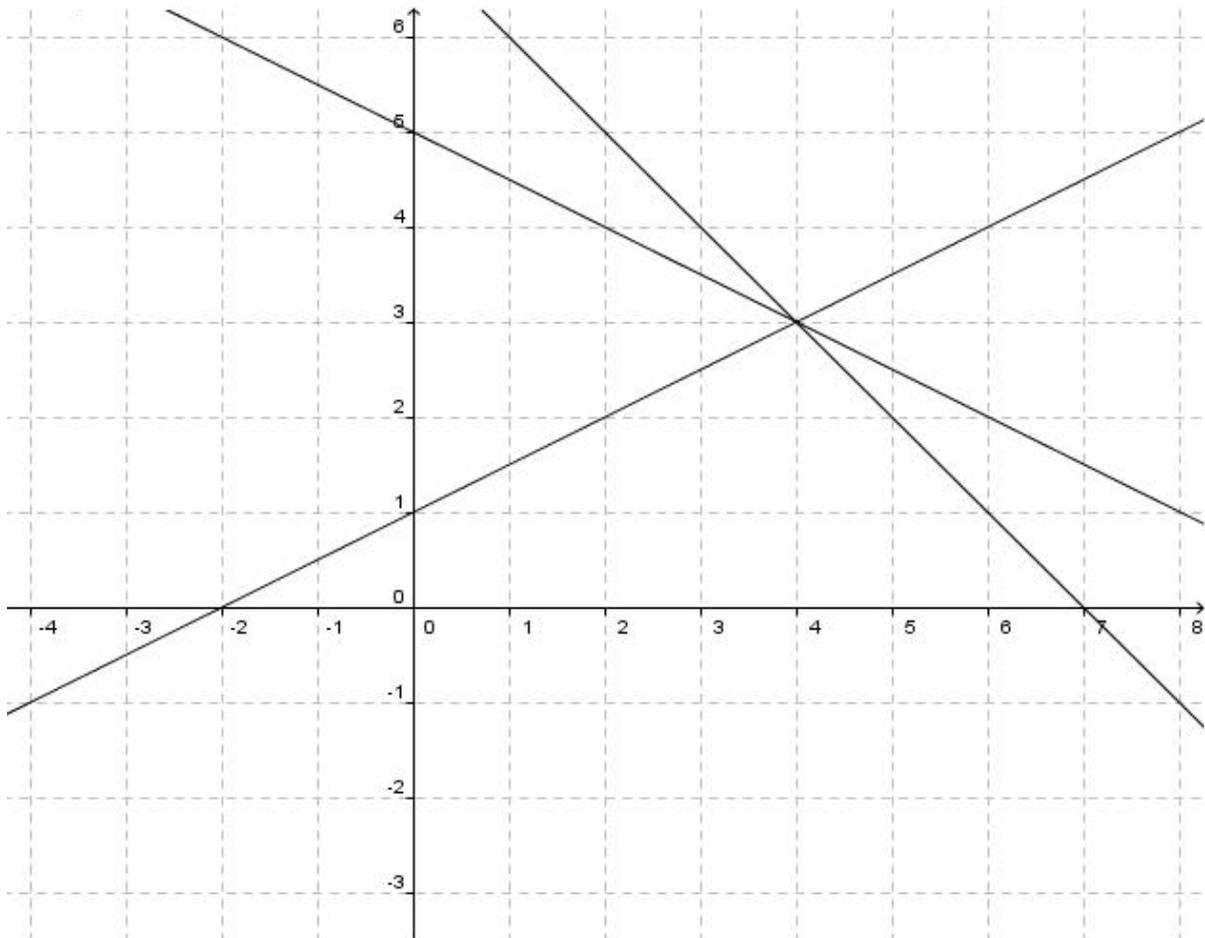
Fragen: _____

Bemerkung zu Beispielaufgaben und Verständlichkeit des Skripts:

Überbestimmte Gleichungssysteme

Es gibt neben den bisher bekannten LGS auch Gleichungssysteme, bei denen mehr Gleichungen als Variablen vorhanden sind, also $m > n$.

Hierbei ist die Frage, ob es eine gemeinsame Lösung für alle drei Gleichungen gibt. Interpretieren wir die Gleichungen z.B. als Funktionsvorschriften, dann wäre die Frage: Haben alle drei Gleichungen einen gemeinsamen Schnittpunkt?



Die Funktionsvorschriften der drei Funktionen lauten:

I $y = \frac{1}{2}x + 1$

II $y = -x + 7$

III $y = -\frac{1}{2}x + 5$

(Welche der Funktion welchem Graphen entspricht, soll sich jeder selbst überlegen.)

Wie löst man aber nun dieses gemeinsame Gleichungssystem?

Um zu sehen, ob es eine gemeinsame Lösung des Systems gibt, berechnen wir die einzelnen Schnittpunkte von I und II, II und III sowie I und III.

I und II	II und III	I und III
I $y = \frac{1}{2}x + 1$ II $y = -x + 7$ I = II: $\frac{1}{2}x + 1 = -x + 7 \quad $ $x + 2 = -2x + 14 \quad $ $3x = 12$ $x = 4$ In I eingesetzt, ergibt: $y = 3$ S(4;3)	II $y = -x + 7$ III $y = -\frac{1}{2}x + 5$ II = III: $-x + 7 = -\frac{1}{2}x + 5 \quad \cdot 2$ $-2x + 14 = -x + 10$ $-x = -4$ $x = 4$ In I eingesetzt, ergibt: $y = 3$ S(4;3)	I $y = \frac{1}{2}x + 1$ III $y = -\frac{1}{2}x + 5$ I = III $\frac{1}{2}x + 1 = -\frac{1}{2}x + 5 \quad \cdot 2$ $x + 2 = -x + 10$ $2x = 8$ $x = 4$ In I eingesetzt, ergibt: $y = 3$ S(4;3)

Alle drei Funktionen haben also den gleichen Schnittpunkt, sprich eine gemeinsame Lösung. Die dritte Rechnung hätte man sich sparen können, da aus I = II und II = III automatisch folgen muss: I = III.

Betrachten wir nun ein Gleichungssystem, das keine gemeinsame Lösung hat. Hier kann man nur Teillösungen von je zwei Gleichungen angeben.

$$\begin{array}{lll}
 \text{I} & 2x_1 - x_2 = 5 & \rightarrow -x_2 = 5 - 2x_1 \rightarrow x_2 = -5 + 2x_1 \\
 \text{II} & 4x_1 - x_2 = 15 & \rightarrow -x_2 = 15 - 4x_1 \rightarrow x_2 = -15 + 4x_1 \\
 \text{III} & -3x_1 + x_2 = -3 & \rightarrow x_2 = -3 + 3x_1
 \end{array}$$

I und II	II und III	I und III
I $2x_1 - x_2 = 5$ II $4x_1 - x_2 = 15$ Beide Gleichungen nach x_2 aufgelöst: $x_2 = -5 + 2x_1$ $x_2 = -15 + 4x_1$	II $4x_1 - x_2 = 15$ III $-3x_1 + x_2 = -3$ Beide Gleichungen nach x_2 aufgelöst: $x_2 = -15 + 4x_1$ $x_2 = -3 + 3x_1$	I $2x_1 - x_2 = 5$ III $-3x_1 + x_2 = -3$ Beide Gleichungen nach x_2 aufgelöst: $x_2 = -5 + 2x_1$ $x_2 = -3 + 3x_1$

I = II: $-5 + 2x_1 = -15 + 4x_1$ $x_1 = 5$ In I eingesetzt, ergibt: $y = 5$ IL = {(5;5)}	II = III: $-15 + 4x_1 = -3 + 3x_1$ $x_1 = 12$ In I eingesetzt, ergibt: $y = -9$ IL = {(12;33)}	I = III $-5 + 2x_1 = -3 + 3x_1$ $x_1 = 12$ In I eingesetzt, ergibt: $y = -33$ IL = {(12;-33)}
--	--	---

Je zwei Gleichungen haben also eine Lösung, eine gemeinsame Lösung gibt es jedoch nicht.

Übungsaufgaben:

Bestimme eine gemeinsame Lösung der ersten beiden Gleichungen und prüfe durch Einsetzen, ob diese Lösung auch die dritte Gleichung erfüllt.

a)
 $x_1 + 3x_2 = 1$
 $2x_1 - x_2 = 2$
 $x_1 + 5x_2 = 1$

Lösung:
(1;0), dritte Gleichung erfüllt

b)
 $2x_1 + 5x_2 = 3$
 $x_1 + 3x_2 = 11$
 $x_1 + 2x_2 = 1$

Lösung:
(-46; 19) dritte Gleichung nicht erfüllt

c)
 $x_1 - 2x_2 = 2$
 $2x_1 - 3x_2 = 3$
 $3x_1 - 4x_2 = 4$

Lösung:
(0; -1), dritte Gleichung erfüllt.